

# 混沌から現れる空間について

## On Space Emerging from Chaos

小笠原 義仁\* 大石 進一  
Yoshihito Ogasawara Shin'ichi Oishi

早稲田大学理工学術院  
Faculty of Science and Engineering, Waseda University

### Abstract:

The purpose of this study is to find the relation between the chaos theory and space perception. The tent map is a typical chaotic map and it has an interesting property related to general problems about determinism, causality, free will, and irreversibility. Then, as its generalized property, the notion of a primitive chaos is proposed, and we can see the emergence of notion of nondegenerate Peano continuum by exploring sufficient conditions for the existence of the primitive chaos from a topological viewpoint.

## 1 はじめに

本研究は、数理科学におけるカオス研究の結果を報告する事により、空間把握・空間知覚に関する示唆を得る事を目的とする。具体的には、混沌の中から現れてくる空間をトポロジカルな観点から議論する。

## 2 Primitive Chaos

カオス理論において基本的な写像としてよく知られているテント写像

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$
$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 2(1-x) & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

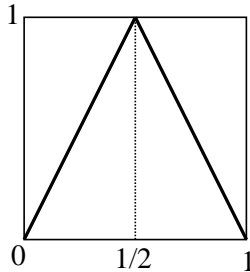


図 1: テント写像

は次の性質を持つ。

\*連絡先：早稲田大学理工学術院  
〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1  
E-mail: ogasawara@aoni.waseda.jp

(A) 任意の無限列

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$$

に対して、

$$\varphi(x_0) \in \omega_1, \varphi(\varphi(x_0)) \in \omega_2, \dots$$

を満たすような初期値  $x_0 \in \omega_0$  が存在する。但し、各  $\omega_i$  は  $A = [0, 1/2]$  か  $B = [1/2, 1]$  である。

この性質は、決定論と非決定論の問題、因果律の問題、不可逆性の問題、自由意志の問題に関連する興味深いものであり、さらにその一般化として primitive chaos の概念を得る事が出来る [1]。

定義 1 集合  $X$ , 部分集合族  $\{X_\lambda; \emptyset \neq X_\lambda \subset X, \lambda \in \Lambda\}$ , 写像族  $\{f_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow X, \lambda \in \Lambda\}$  が性質 (P) を満たす時,  $(X, \{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \{f_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow X, \lambda \in \Lambda\})$  を *primitive chaos* と呼ぶ。

(P) 任意の集合列

$$\{\omega_i\}_{i=0}^\infty \subset \{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

に対して初期値  $x_0 \in \omega_0$  が存在して、

$$f_{\omega_0}(x_0) \in \omega_1, f_{\omega_1}(f_{\omega_0}(x_0)) \in \omega_2, \dots$$

が成り立つ。

primitive chaos から、従来の意味でのカオス的性質が現れてくるが知られている [2]。そして、この primitive chaos の存在を保証する条件をトポロジカルな観点か

ら探求する事により, nondegenerate Peano continuum が現れてくる様子を見ることが出来る [1]。但し, nondegenerate Peano continuum とは, 2 点以上を含む局所連結な連続体の事である [3]。

まず, 性質 (P) を保証するための条件を示す命題として次が成り立つ。但し, 可算コンパクト空間とは, 任意の可算な開被覆が有限部分被覆を持つ事であり, 従って任意のコンパクト空間は可算コンパクトである。

命題 1  $X$  は可算コンパクト空間であり,  $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  は閉集合族であるとして, 各  $f_{X_\lambda}$  が連続全射とするならば, 性質 (P) は満たされる。

そして, 連続全射  $f_{X_\lambda}$  の存在を保証するための命題として次が成り立つ。

命題 2  $A$  と  $X$  を nondegenerate Peano continuum とすると, 任意の  $m$  個の点  $a_1, \dots, a_m \in A$  と  $x_1, \dots, x_m \in X$  に対して, 連続全射  $f: A \rightarrow X$  が存在して, 各  $i$  について  $f(a_i) = x_i$  が成り立つ。

さらに, 次の補題が成り立つ。

補題 1  $X$  を Peano continuum とすると, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, Peano subcontinuum からなる  $X$  の被覆  $\{X_1, \dots, X_n\}$  が存在して, 各  $X_i$  の直径を  $\varepsilon$  未満にする事が出来る。

従って, まとめると次の定理が得られる。

定理 1  $X$  を nondegenerate Peano continuum とすると, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 直径が  $\varepsilon$  未満の nondegenerate Peano subcontinuum からなる  $X$  の被覆  $\{X_1, \dots, X_n\}$  が存在する。そして各  $i$  について, 任意の  $m^i$  個の点  $x_1^i, \dots, x_{m^i}^i \in X_i$  と  $y_1^i, \dots, y_{m^i}^i \in X$  に対して, 連続全射  $f_{X_i}: X_i \rightarrow X$  が存在して  $f_{X_i}(x_1^i) = y_1^i, \dots, f_{X_i}(x_{m^i}^i) = y_{m^i}^i$  が成り立ち, 性質 (P) が満たされる。

そして, 例えばヴァイツゼッカーが指摘する次の状況に対応する様子を見る事が出来る [2, 4]。

「…ゲシュタルトは次々に継起する。しかしすべてのゲシュタルトのゲシュタルトはそれらのゲシュタルトの帰結ではなく, それらのゲシュタルトが永遠に始原へと帰還しながら自己自身と出会うことである ([5], 木村敏, 濱中淑彦訳)。」

### 3 むすび

カオス理論の観点から, 空間把握・空間知覚の原初的な状況に関する議論を行った。

## 謝辞

本研究は JST CREST の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] Y. Ogasawara: J. Phys. Soc. Jpn. **79** (2010) 15002.
- [2] Y. Ogasawara, S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. **81** (2012) 103001.
- [3] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory* (Marcel Dekker Inc., New York, 1992).
- [4] Y. Ogasawara, S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. **80** (2011) 67002.
- [5] V. Weizsäcker: *Der Gestaltkreis: Theorie der Einheit von Wahrnehmen und Bewegen* (Georg Thieme Verlag, Stuttgart, 1940).
- [6] K. Lewin (translated by F. Heider and G. M. Heider): *Principles of topological psychology* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1936).
- [7] J. Piaget: *Le Structuralisme* (Presses Universitaires de France, Paris, 1968).
- [8] R. Thom: *Stabilité Structurale et Morphogénèse* (InterEditions, Paris, 1977).
- [9] 小笠原義仁「ものの見方としての位相空間論入門」培風館, 2011.